418. 一階常微分方程式ノ特異点ニ就テ, VIII

福原 満洲雄（北大）

x, y ノ代リニ変数 t, y ヲ取レバ (A) ハ

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{dy}{dt} = F(t, y)$$

トナリ, (α), (β), (γ) ハ

$$(\alpha') \qquad y \sim \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e^{jt}$$

$$(\beta') \qquad y \sim \sum \alpha_{jk} e^{jt} (C e^{\lambda t})^k \qquad (\alpha_{00} = 0, \ \alpha_{01} = 1)$$

$$(\gamma') \qquad y \sim \sum \alpha_{jk} e^{jt} ((\kappa t + c) e^{\lambda t})^k \qquad (\alpha_{00} = 0, \ \alpha_{01} = 1)$$

トナル、変数 t, s ヲ取レバ (A) ハ

$$(\mathrm{A}'') \qquad e^s \frac{ds}{dt} = \mathfrak{F}(t, s)$$

トナル。

$$\alpha_j = 0 \,. \ (j < m_0), \quad \alpha_{m_0} \neq 0)$$

ナラバ (α) ハ

$$(\alpha'') \qquad s \sim m_0 t + 2k\pi i + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e^{jt}$$

トナル. 総テノ α_j ガ 0 ナラバ (β), (γ) ニ相当スル形式的

ノ解ハ

$$(\beta'')\quad s \sim \lambda t + C + \sum \rho_{jk} e^{jt} (Ce^{\lambda t})^{k} \qquad (\rho_{00}=0)$$

$$(\gamma'')\quad s \sim \lambda t + \log(\varkappa t + C) + 2h\pi i + \sum \rho_{jk} e^{jt}\left((\varkappa t + C)e^{\lambda t}\right)^{k}$$

トナル、hハ勝手ナ整数デアル、(A), (A′), (α), --------等ノ記号ハ特異点(I)全体ヲ通ジテ使用スル。

形式的解(α)　コレニ就イテハ (i), (iii), (iv), (v) ヲ一緒ニ論ズル。

1°　$\tau = \tau_0 + \sigma \tan\theta_0$, $\sigma \leqq \sigma_1$ ニ依ッテ表ハサレル半直線ノ上ヲ t ガ動クトキ $m_0 t + 2h\pi i + \gamma_0$ ガ描ク半直線ハ

$$q_1 + p\tan\omega_1 < q < q_2 + p\tan\omega_2, \qquad p < p_0$$

ニ含マレルトスレバ，$\tau = \tau_0 + \sigma\tan\theta_0$, $\sigma \to -\infty$ ノトキ(α″)ナル形ニ展開サレル(A″)ノ解ハ少ナクトモ一ツ存在スル。

2°. 上ニ述ベタ解ハキマッタ h ノ値ニ対シテハ唯一ツデアル。

注意　コノ結論ハ $\mathcal{F}(t, s)$ ノ s ニ関スル正則性ヲ Lipschitz ノ條件デ置換ヘテモ成立スル。

3°. $\tau = \tau_0 + \sigma\tan\theta_0$, $\sigma \to -\infty$ ノ時(α′)ナル形ニ展開サレル(A′)ノ解ガ唯一ツ存在スル。

注意　コヽデモ $F(t, y)$ ノ y ニ関スル正則性ハ y ニ関スル Lipschitz ノ條件デ置換ヘルコトガ出来ル。1°, 2° デハ α_j ノ中ニ0デナイモノガアルコトヲ仮定シテヰルガ，コ

コデハ α_j ガ皆 0 トナッテモ差支ヘナイ、但シ $F(t, y)$ ノ y ニ関スル正則性ヲ仮定スル場合ニスベテノ α_j ガ 0 トナレバ $F(t, 0)=0$ トナッテ問題ニナラナイ。

4°. $t=\sigma+i\tau$ ガ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2+\sigma\tan\theta_2, \quad \sigma\leqq\sigma_1$$

ヲ満足スル時 $m_0 t+2h\pi i+\beta_0$ ハ

$$q_1+p\tan\omega_1 < q < q_2+p\tan\omega_2, \quad p<p_0$$

ニ含マレルトスレバ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2+\sigma\tan\theta_2, \quad \sigma\to-\infty$$

ノ時 (α'') ナル形ニ展開サレル (A'') ノ解ガ存在スル、ソレハ h ノ値ヲキメルコトニ依ッテ唯一ツトナル。

5° $\tau_1+\sigma\tan\theta_1 \leqq \tau \leqq \tau_2+\sigma\tan\theta_2, \quad \sigma\to-\infty$

ノトキ (α') ナル形ニ展開サレル (A') ノ解ガ唯一ツ存在スル。

6° (A) ハ $x=0$ デ正則ナ解ヲ唯一ツ持チ其ノ maclaurin 級数ガ (α) トナル。

<u>證明ノ方針</u> 1° 正ノ数 ε ヲ十分ニ小サク取レバ

$$G(t, z)=g(e^t, z)$$

ハ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0, \quad \sigma\leqq\sigma_1, \quad |z|\leqq\varepsilon e^{m_0\sigma}$$

デ一價連続トナルコトニ注意スル。σ ヲ独立変数ニ取レバ (B) ハ

$$\frac{dz}{d\sigma}=(1+i\tan\theta)\,G(t,z)$$

トナルカラ，コレガ $\sigma\to-\infty$ ノ時 $z=O(e^{N\sigma})$ ヲ満足スル解ヲ持ツコト，及ビ $z=o(e^{A\sigma})$ ヲ満足スル解ハ必ズ

$z=O(e^{N\sigma})$ ヲ満足スル様ニ N ニ関係シナイ A ガ取レルコトヲ存在定理及ビ比較定理ヲ使ツテ証明スル。

2° 解ノ単独性ニ関スル定理ノ應用.

3° $s=\varphi(t)$ ガ (A'') ノ解ナラバ $s=\varphi(t)\pm 2\pi i$ モ亦 (A'') ノ解デアルコトニ注意スレバヨイ。

4° 半直線 $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\quad \sigma\leqq\sigma_1$ ハ

$$\tau_1+\sigma\tan\theta_1<\tau<\tau_2+\sigma\tan\theta_2,\quad \sigma<\sigma_0$$

ニ含マレルトスル。 2° ノ場合ノ結果ヲ使ヘバ

$$\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\quad \sigma\to-\infty$$

ノ時 $z=O(e^{Nt})$ ヲ満足スル。

$$(B')\qquad \frac{dz}{dt}=G(t,z)$$

ノ解ガ唯一ツ存在スル、ソレヲ $\psi(t)$ トスル. σ ヲ固定シテ τ ヲ独立変数ニ取レバ (B') ハ

$$\frac{dz}{d\tau}=i\,G(t,z)$$

トナル、コノ解デ $\tau=\tau_0+\sigma\tan\theta_0,\ \sigma\leqq\sigma_1$ デ $|z|\leqq Ke^{N\sigma}$ ヲ満足スルモノガ満足スベキ不等式ヲ比較定理ニ依テ求メル.

5° $s=\varphi(t)$ ガ (A') ノ解ナラバ $s=\varphi(t)\pm 2\pi i$ モ (A'') ノ解デアルコトニ注意スレバヨイ。

6° $y=\varphi(t)$ ガ (α') ナル形ニ展開サレル (A') ノ解ナラバ $\varphi(t+2\pi i)$ モ (α') ナル形ニ展開サレル (A') ノ解デ, 解ノ単独性ニヨリ $\varphi(t+2\pi i)=\varphi(t)$ トナルコトニ注意スレバヨイ。

<u>注意</u>　(ii) ノ場合デモ $x=0$ ナラバ C ニキマツタ値ヲ與ヘテ得ラレル級数 (γ), (γ'), (γ'') ニ対シテ以上ノ結果ガソノマヽ成立スル。　又 $\lambda=0$ ノ場合ヲ除ク必要ハナイ。